

Adaptation de maillage parallèle pour la modélisation de la banquise

F. Salmon^{*1}, N. Barral¹, S. Leroux², P. Rampal³

¹Inria, CARDAMOM, Univ. Bordeaux, CNRS, Bordeaux INP, IMB, UMR 5251, Talence, France

²Datlas, Grenoble, France

³Institut de Géophysique de l'Environnement, CNRS, UMR 5001, Grenoble, France

*Fabien.Salmon@inria.fr

Contexte

- Le réchauffement climatique affecte tout particulièrement les pôles. L'amincissement de la banquise a un impact direct sur sa réponse mécanique aux forces qu'elle subit, engendrant une intensification de sa fracturation.
- neXtSIM [1] est un nouveau modèle Éléments Finis développé pour modéliser la dynamique complexe de la banquise sur une aussi grande gamme d'échelles que possible. neXtSIM utilise un formalisme d'advection purement lagrangien sur maillage mobile ainsi qu'un nouveau cadre rhéologique de type brittle Bingham-Maxwell.
- Les termes sources et puits sont calculés au travers de modèles thermodynamiques et mécaniques tenant compte de l'épaisseur de neige, l'ancienneté de la glace, le niveau des océans, la salinité, des échanges thermiques, etc..
- neXtSIM possède une étape d'optimisation de maillage, pour corriger les éléments du maillage rendus trop étirés ou inversés par l'approche lagrangienne. Cette étape, d'une part, est séquentielle, et d'autre part, ne tire pas parti des techniques d'adaptation de maillage modernes.
- **L'objectif est le couplage de neXtSIM avec un remaillieur adaptatif parallèle.**

Adaptation de maillage & ParMMG2D

Champ de métriques riemanniennes & Procédure de remaillage

- MMG [3] est une librairie d'adaptation de maillage anisotrope. Le logiciel prend en entrée un maillage et une métrique (carte de tailles), et renvoie un maillage adapté à cette métrique.
- Un espace métrique riemannien est la donnée d'un espace vectoriel et d'un champ de tenseurs métriques $M = (M(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in \Omega}$ sur le domaine Ω , qui permet de calculer des longueurs en chaque sommet du domaine.
- En 2D, on se représente géométriquement un tenseur métrique comme une ellipse dont les axes sont alignés avec ses vecteurs propres et de longueurs égales aux racines carrées de l'inverse des valeurs propres.
- MMG modifie itérativement le maillage d'entrée en utilisant des opérateurs de remaillage classiques: insertion de sommet, suppression d'arête, bascule d'arête et lissage.
- La stratégie de parallélisation retenue est la suivante:
 - appeler le remaillieur séquentiel sur chaque partition du domaine en gelant les éléments de bords
 - décaler les frontières des partitions de quelques épaisseurs d'éléments pour dégeler les zones gelées
 - itérer ainsi jusqu'à ce que tout le maillage ait été adapté

ParMMG2D

$$f(x, y) = \alpha \sin(\beta xy) \text{ avec } \alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{\pi}{50} \leq |xy| \leq \frac{2\pi}{50} \\ 0.01 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et } \beta = \begin{cases} 1 & \text{si } |xy| < \frac{\pi}{50} \\ 50 & \text{sinon} \end{cases}$$

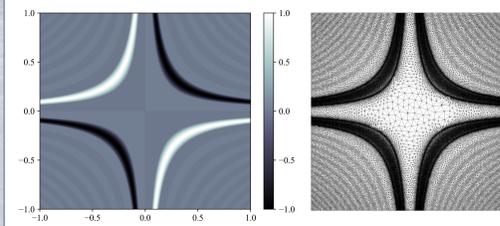


Fig.1: Fonction de référence utilisée pour l'adaptation du maillage

Fig.2: Maillage adapté à la fonction de référence sur 16 processeurs

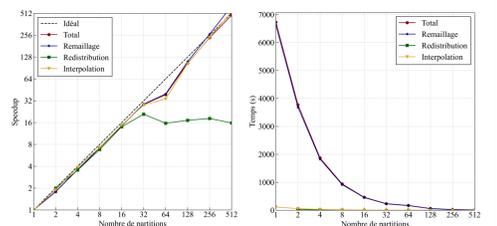


Fig.3: Scalabilité de ParMMG2D pour 10 millions d'éléments

Fig.4: Temps de calcul pour 10 millions d'éléments

Obtention du champ de métriques

Objectif

Optimiser la taille des éléments du maillage par rapport à l'erreur numérique, tout en conservant une variation de tailles réduite et en garantissant la validité du maillage tout au long du calcul.

Calcul d'une métrique optimale a priori

- **Modèle d'erreur:** on veut minimiser l'erreur d'interpolation dans le cadre du maillage continu [2]:

$$E_{L^p} = \left(\int_{\Omega} \text{Tr} \left(M(\mathbf{x})^{-\frac{1}{2}} |H_v(\mathbf{x})| M(\mathbf{x})^{-\frac{1}{2}} \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

avec $H_v(\mathbf{x})$ la matrice hessienne de v en \mathbf{x} . Pour notre application, on se limite au cas 2D isotrope.

- On minimise l'erreur sous les contraintes : (i) le nombre de sommets est fixé à N , (ii) compte tenu du modèle physique de banquise, la taille des éléments doit être comprise entre h_{min} et h_{max} .
- La solution à ce problème d'optimisation, obtenue par le calcul des variations, est $M_{opt}(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}) I_2 |\mathbf{v}_i|$, où les \mathbf{v}_i sont les vecteurs propres de $|H_v|$ et

$$\lambda(\mathbf{x}) = \begin{cases} h_{max}^{-2} & \text{si } f(\mathbf{x}) < z_1 \\ \lambda_{L^p}(\mathbf{x}) & \text{si } z_1 \leq f(\mathbf{x}) < z_2 \\ h_{min}^{-2} & \text{si } f(\mathbf{x}) \geq z_2 \end{cases},$$

où $f(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^2 \gamma_i(\mathbf{x}) \right)^p$ et $\gamma_i(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_i^T |H_v(\mathbf{x})| \mathbf{v}_i$.

- λ_{L^p} est adaptée de [2]:

$$\lambda_{L^p}(\mathbf{x}) = \left(N - \mathcal{A}(A_{z_1}) h_{max}^{-2} - \mathcal{A}(B_{z_2}) h_{min}^{-2} \right) \left(\int_{H_{z_1, z_2}} f(\mathbf{x})^{\frac{1}{p+1}} dx \right)^{-1} f(\mathbf{x})^{\frac{1}{p+1}},$$

où $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ est l'aire de l'ensemble \mathcal{E} , $A_{z_1} = \{\mathbf{x} \in \Omega, f(\mathbf{x}) < z_1\}$, $B_{z_2} = \{\mathbf{x} \in \Omega, f(\mathbf{x}) \geq z_2\}$, $H_{z_1, z_2} = \Omega \setminus (A_{z_1} \cup B_{z_2})$.

- z_1 et z_2 sont déterminés par continuité : $\lambda_{L^p}(\mathbf{x}_1) = h_{max}^{-2}$ et $\lambda_{L^p}(\mathbf{x}_2) = h_{min}^{-2}$ où $z_1 = f(\mathbf{x}_1)$ et $z_2 = f(\mathbf{x}_2)$.

Exemple

- $f(x, y) = a(a(\sqrt{x^2 + y^2})) + a(a(\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}))$ avec $a(x) = \tanh\left(\sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right)\right)$
- Maillage initial de 500 000 triangles isotropes et 250 000 sommets
- Contraintes sur la taille : $h_{min} = \frac{3}{4}\bar{h}$ et $h_{max} = \frac{4}{3}\bar{h}$ (\bar{h} est la taille moyenne des éléments du maillage initial)
- Contrainte sur le nombre de sommets : 50 000 sommets

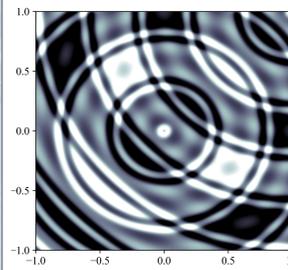


Fig.5: Fonction de référence utilisée pour l'adaptation du maillage

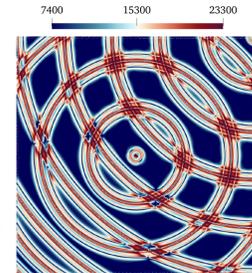


Fig.6: Composante diagonale de la métrique solution optimale du problème de minimisation

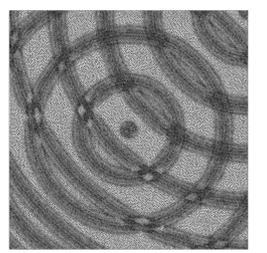


Fig.7: Maillage adapté à la fonction de référence

Couplage parMMG2D - neXtSIM

Comparaison entre un état initial et après 5 jours d'évolution de la banquise (360 itérations - 30 remaillages)

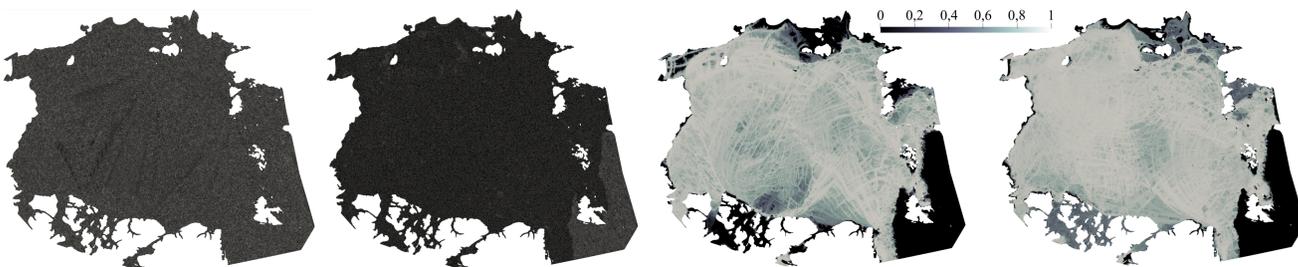


Fig.8: Maillage initial et final

Fig.9: Endommagement de la banquise initial et final

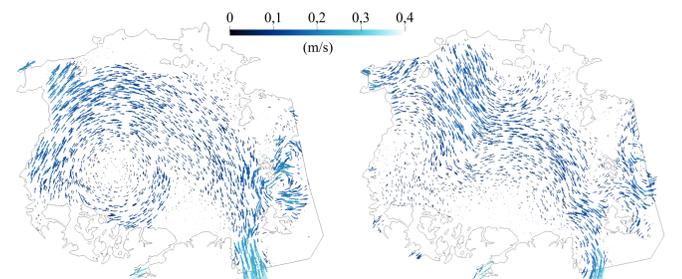


Fig.10: Vitesse de déplacement de la banquise initiale et finale

Perspectives

- Paralléliser la dernière partie séquentielle de neXtSIM, le transfert de solutions conservatif d'un maillage à l'autre.
- Effectuer des simulations numériques de la dynamique de la banquise arctique de très haute résolution (éléments < 1 km) sur le temps long (plusieurs années).

Références

- [1] P. Rampal, S. Bouillon, E. Olason et M. Morlighem, neXtSIM: a new Lagrangian sea ice model, *The Cryosphere*, **10**, 1055-1073, 2016
- [2] A. Loseille et F. Alauzet, Continuous mesh framework part I: well-posed continuous interpolation error, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **49**(1), 38-60, 2011
- [3] Mmg platform website. <https://www.mmgtools.org>